Hong Kong Mathematics Olympiad (2022/23)

Heats – Individual Event

香港数学竞赛 (2022/23)

初赛个人项目

Unless otherwise stated, all answers should be given in exact numerals in their simplest form.
No approximation is accepted.
The diagrams are not necessarily drawn to scale.
除特别指明外，所有答案须以数字的真确值表达，并化至最简。
不接受近似值。
所有附图不一定依比例绘成。

Part A
甲部

1. Given that a and b are real numbers. If $a^2+b^2-8a+34b+305=0$, find the value of $a+b$.
已知 a 及 b 均为实数。若 $a^2+b^2-8a+34b+305=0$，求 $a+b$ 的值。

2. If x and y are positive integers satisfying $x+8xy+y=28$, find the largest possible value of $x+2y$.
若 x 及 y 均为正整数且满足 $x+8xy+y=28$，求 $x+2y$ 的最大可能值。

3. Let m be an integral constant, where $4<m<40$. If the equation $x^2-2(2m-3)x+4m^2-14m+8=0$ has two integral roots, find the largest possible value of x.
设 m 为一个整数常数，其中 $4<m<40$。若方程 $x^2-2(2m-3)x+4m^2-14m+8=0$ 有两个整数根，求 x 的最大可能值。

4. Let a be a positive real number. If $a^2+\frac{1}{a^2}=14$, find the value of $a^3+\frac{1}{a^3}$.
设 a 为一正实数。若 $a^2+\frac{1}{a^2}=14$，求 $a^3+\frac{1}{a^3}$ 的值。

5. The sum of a certain number of positive integers is 60. The largest positive integer is 15 and one of the positive integers is 12. Apart from this positive integer 12, the remaining positive integers form an arithmetic sequence. Find the smallest positive integer.
若干正整数之和是 60。最大正整数为 15 及其中有一个正整数是 12。除却这正整数 12，其余正整数恰好组成一个等差数列。求最小的正整数。

6. In Figure 1, the rectangle $ABCD$ is rotated about its centre 45° anticlockwise to obtain the rectangle $EFGH$. If $AB = 4$, find the area of the shaded region $PQRS$.
在图一中，把长方形 $ABCD$ 绕它的中心逆时针转 45° 得长方形 $EFGH$。若 $AB = 4$，求阴影部分 $PQRS$ 的面积。

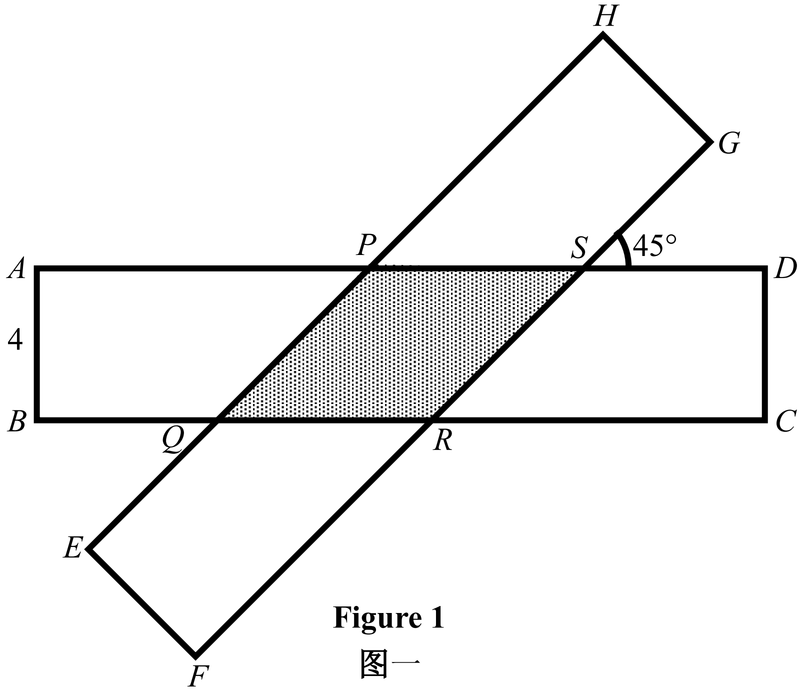

Figure 1
图一

7. Evaluate $\left(\dfrac{1\times4\times16\times64+2\times8\times32\times128+3\times12\times48\times192+\cdots+2023\times8092\times32368\times129472}{1\times5\times25\times125+2\times10\times50\times250+3\times15\times75\times375+\cdots+2023\times10115\times50575\times252875}\right)^{\frac{1}{6}}$.

求 $\left(\dfrac{1\times4\times16\times64+2\times8\times32\times128+3\times12\times48\times192+\cdots+2023\times8092\times32368\times129472}{1\times5\times25\times125+2\times10\times50\times250+3\times15\times75\times375+\cdots+2023\times10115\times50575\times252875}\right)^{\frac{1}{6}}$ 的值。

8. If the area of an equilateral triangle is numerically equal to its perimeter, find the radius of the circumcircle of this equilateral triangle.
若一个等边三角形的面积与其周界在数值上相等，求该正三角形的外心圆的半径。

9. In Figure 2, P be a point inside the square $ABCD$ such that $\Delta ABP \cong \Delta ADP$, $AP = 5\sqrt{2}$ and $BP = 13$. Find the area of the square $ABCD$.
在图二中，P 为正方形 $ABCD$ 内的一点使得 $\Delta ABP \cong \Delta ADP$、 $AP = 5\sqrt{2}$ 及 $BP = 13$。求正方形 $ABCD$ 的面积。

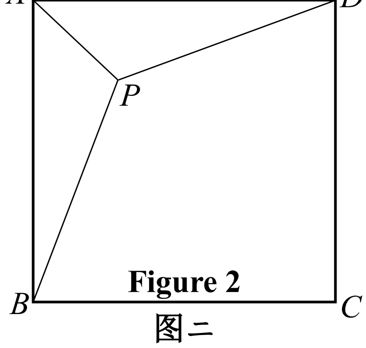

Figure 2
图二

10. In Figure 3, D, E and F are the points lying on BC, AC and AB respectively. AD, BE and CF intersect at

P such that area of $\Delta APF = 84$, area of $\Delta BPD = 40$, area of $\Delta CPD = 30$ and area of $\Delta CPE = 35$. Find the area of ΔABC.

在图三中，D、E 及 F 分别为 BC、AC 及 AB 上的点。AD、BE 及 CF 相交于 P 使得 ΔAPF 的面积 $= 84$、ΔBPD 的面积 $= 40$、ΔCPD 的面积 $= 30$ 及 ΔCPE 的面积 $= 35$。求 ΔABC 的面积。

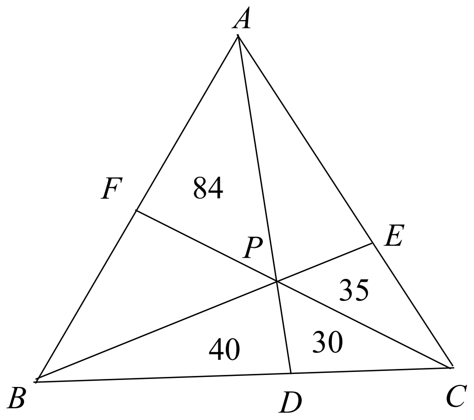

Figure 3

图三

Part B

乙部

11. Given that n is a positive integer less than 2023. If n has only 3 distinct factors, find the number of possible values of n.

    已知 n 是一个少于 2023 的正整数。若 n 只有三个不同的因子，求 n 的可能性的总数。

12. Given that p and q are positive numbers. If $\log_9 p = \log_{15} q = \log_{25}(3p+2q)$, find the value of $\dfrac{p}{q}$.

    已知 p 及 q 为正实数。若 $\log_9 p = \log_{15} q = \log_{25}(3p+2q)$，求 $\dfrac{p}{q}$ 的值。

13. A sequence of numbers $\{a_n\}$ is defined by $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{3}{7}$ and $a_n = \dfrac{a_{n-2}a_{n-1}}{2a_{n-2} - a_{n-1}}$ for all $n \geq 3$. Find the value of $\dfrac{1}{a_{2023}}$.

    数列 $\{a_n\}$ 的定义为 $a_1 = 1$、 $a_2 = \dfrac{3}{7}$ 及对所有 $n \geq 3$，$a_n = \dfrac{a_{n-2}a_{n-1}}{2a_{n-2} - a_{n-1}}$。求 $\dfrac{1}{a_{2023}}$ 的值。

14. ABC is an isosceles triangle with $AB = AC = 18$ and $BC = 12$. P is any interior point of ΔABC such that $\angle ABP + \angle ACP = 90^\circ$ and $AP = 15$. Find the value of $BP^2 + CP^2$.

ABC 是一个等腰三角形，其中 $AB = AC = 18$ 及 $BC = 12$。P 为 ΔABC 内的任意一点使得 $\angle ABP + \angle ACP = 90°$ 及 $AP = 15$。求 $BP^2 + CP^2$ 的值。

15. Find the product of the roots of the equation $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-4} = \sqrt[3]{x-2}$.

求方程 $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-4} = \sqrt[3]{x-2}$ 的根之积。

END

完